9. Aufgabenblatt: Analysis 1

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Sommer 2024
Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 9.1 Zeigen Sie direkt, d.h. anhand der Differenzierbarkeitsdefinition 6.1, dass folgende Funktionen differenzierbar sind, und bestimmen Sie die Ableitung.

1) $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
2) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 9.2 Finden Sie die lineare Approximation $g(x)$ der Funktion $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$, an der Stelle $p = 225$, und bestimmen Sie $g(220)$, $g(228)$ und $g(240)$; vergleichen Sie diese mit $\sqrt{220}$, $\sqrt{228}$ und $\sqrt{240}$.

Aufgabe 9.3 Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen an den Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen sie definiert sind.

$$f_1(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x - 1\ , \qquad f_2(x) = x^2 \sin(3x) + x^{-2} \cos(3x)\ ,$$

$$f_3(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3\ , \qquad f_4(x) = \exp(x^4 + (5e)^x)\ ,$$

$$f_5(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 1}\ , \qquad f_6(x) = \tan(\ln(x^2 + 1))\ .$$

Aufgabe 9.4 Zeigen Sie:

1) Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Funktion und $g(x) = \ln(f(x))$, so gilt:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2) Die Funktion $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ ist in den Punkten $x \in]-1, 1[$ differenzierbar, und es gilt dort:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$